Théorie de la Mesure et Intégration au sens de Lebesgue

notes d'après le cours aot11 de Benoît Bonnet-Weill [*]

A. Wayoff

2023

Table des matières

[*] `https://factoriellepi.github.io/Page-perso-Bonnet_Weill/`

Notations.

(i) Dans toute la suite on note X un ensemble et $P(X)$ l'ensemble de ses parties.

(ii) $(a,b) =]a\,;b[$

1 Théorie de la mesure

1.1 Mesures extérieures et ensembles mesurables

Intuitivement, une mesure extérieure est une application de $P(X)$ dans $[0\,;+\infty]$ et qui satisfait deux règles « raisonnables ».

Définition 1.1 (Mesure extérieure). Une application $\mu\colon P(X) \to [0\,;+\infty]$ est une *mesure extérieure* si

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) pour toute famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset P(X)$ et $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ alors, $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

Autre définition possible :

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) μ est croissante : $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$,

(iii) μ est sous-additive : $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_n\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(E_n)$.

La différence essentielle d'une mesure extérieure par rapport à une mesure est qu'on ne demande par à ce qu'il ait égalité dans (iii) si les E_n sont deux à deux disjoints.

Définition 1.2 (Ensemble μ-mesurable). On dit que A est *μ-mesurable*, noté $A \in \mathcal{A}_\mu$ si pour tout $B \in P(X)$, on a

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad \text{« découpe de masse »}$$

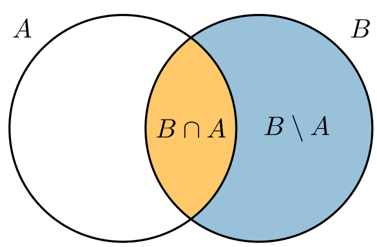

Figure 1 – $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$

Théorème 1.1 (Propriétés des ensembles mesurables). *Soit $\mu\colon P(X) \to [0\,;+\infty]$ une mesure extérieure.*

(i) $A \in \mathcal{A}_\mu \iff X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$,

(ii) $\varnothing, X \in \mathcal{A}_\mu$,

(iii) Si $\mu(A) = 0$ *alors* $A \in \mathcal{A}_\mu$,

(iv) Pour tout $C \in P(X)$, *la restriction* $\mu_{LC}(A) \overset{\text{def}}{=} \mu(A \cap C)$ *est une mesure extérieure et*

$$A \in \mathcal{A}_\mu \implies A \in \mathcal{A}_{\mu_{LC}}.$$

Théorème 1.2 (Structure de $\mathcal{A}_\mu$). *Soit $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$. Alors,*

(i) $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ *et* $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ *sont μ-mesurables.*

(ii) *Si les* $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *sont disjoints alors,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

(iii) *Si* $A_k \subset A_{k+1}$ *pour tout* $k \geqslant 1$, *alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right).$$

(iv) *Si* $A_{k+1} \subset A_k$ *pour tout* $k \geqslant 1$, *alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right).$$

1.2 Systèmes d'ensembles et σ-algèbres

Définition 1.3 (Tribu / σ-algèbre). Une famille d'ensembles $\mathcal{A} \subset P(X)$ est une σ-algèbre si

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \iff X \setminus A \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire),

(iii) Pour $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$ (stabilité par union dénombrable).

Remarque 1.1. On en déduit que

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A} \text{ (stabilité par intersection dénombrable)}$$

si $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$.

Théorème 1.3. *Pour* $\mu\colon P(X) \to [0\,;+\infty]$ *une mesure extérieure, on a que* $\mathcal{A}_\mu$ *est une* σ*-algèbre.*

Lemme 1.1. *Si* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *sont des* σ*-algèbres alors* $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ *est une* σ*-algèbre.*

Définition 1.4 (Tribu / σ-algèbre engendrée par une famille). Si $\mathcal{C} \subset P(X)$ on définit

$$\sigma(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\mathcal{A}} \big\{\mathcal{A} \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A} \text{ est une } \sigma\text{-algèbre}\big\}.$$

Remarque 1.2. $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathcal{C}$.

Définition 1.5 (Tribu borélienne). On définit la *tribu borélienne*

$$\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma(\mathcal{O}) \quad \text{où } \mathcal{O} \subset P\big(\mathbb{R}^d\big) \text{ sont les ouverts.}$$

Proposition 1.1 (Générateurs de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). *La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *peut être alternativement générée par les familles suivantes*

(i) $\big\{(a\,;b) \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}$,

(ii) $\big\{(a\,;b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\big\}$,

(iii) $\big\{(-\infty\,;c) \mid c \in \mathbb{R}\big\}$,

(iv) $\big\{(c\,;+\infty) \mid c \in \mathbb{R}\big\}$.

Définition 1.6 (π-système, λ-système).

— Une collection $\mathcal{P} \subset P(X)$ est un π-système si :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}.$$

— Une collection $\mathcal{L} \subset P(X)$ est un λ-système si :
  (i) $X \in \mathcal{L}$,
  (ii) si A, B tels que $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{L}$,
  (iii) si $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}$ croissante, alors $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{L}$.

Théorème 1.4 (Théorème π-λ (Théorème de classe monotone)). *Si $\mathcal{P}$ est un π-système et $\mathcal{L}$ un λ-système tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.*

Définition 1.7 (Mesures extérieures de Borel). La mesure extérieure $\mu \colon P(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ est dite de Borel si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_\mu$.

« Borel $=$ σ-algèbre engendrée par les ouverts », « On peut donner une valeur avec μ à tous les ouverts ».

Proposition 1.2 (Critère de coïncidence). *Soient μ, ν des mesures extérieures de Borel telles que $\mu(R) = \nu(R)$ pour tout $R \in \left\{ \prod_{i=1}^{d} [a_i\,; b_i] \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \right\}$. Alors, $\mu = \nu$.*

1.3 Propriétés des mesures extérieures de Borel

Théorème 1.5 (Critère de Carathéodory). *Une mesure extérieure μ est Borel si et seulement si*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

dès lors que $\operatorname{dist}(A, B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{|a - b| \mid a \in A, b \in B\}$ est strictement positive.

Définition 1.8 (Mesures de Borel régulières et de Radon). Une mesure extérieure μ est Borel régulière si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B)$. Si de plus $\mu(K) < +\infty$ pour tout K compact, on dit que μ est une mesure extérieure de Radon.

Proposition 1.3 (Approximation topologique). *Soient μ une mesure de Borel et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*
  (a) Si $\mu(B) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon \subset B$ fermé tel que $\mu(B \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.
  (b) Si μ est une mesure de Radon, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U_\varepsilon \supset B$ ouvert tel que $\mu(U_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$.

Une union dénombrable d'un fermé peut être un ouvert.

Théorème 1.6 (Régularité des mesures de Radon). *Si μ est une mesure de Radon et $A \in \mathcal{A}_\mu$, alors :*
  (i) μ est intérieurement régulière i.e. :

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\},$$

  (ii) μ est extérieurement régulière i.e. :

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset A \text{ ouvert}\}.$$

1.4 Mesures classiques et liens avec les mesures extérieures

Définition 1.9 (Mesures et espaces mesurables). On dit que $(X, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable* si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X.
On dit que $\mu \colon \mathcal{A} \to [0\,;+\infty]$ est une *mesure* si

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) si $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Théorème 1.7 (Restriction d'une mesure extérieure). *Si $\mu^\star \colon P(X) \to [0\,;+\infty]$ est une mesure extérieure alors $\mu^\star \colon \mathcal{A}_{\mu^\star} \to [0\,;+\infty]$ est une mesure.*

Proposition 1.4. *$\mathcal{A}_\mu$ est une σ-algèbre.*

Théorème 1.8 (Extension de Lebesgue). *Si $\mu \colon \mathcal{A} \to [0\,;+\infty]$ est une mesure, alors*

$$\mu^\star(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \;\middle|\; \{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \textit{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right\}$$

est une mesure extérieure.
Par ailleurs,

$$A_{\mu^\star} = \mathcal{A}_\mu$$

i.e. les mesurables pour $\mu^\star$ sont exactement les ensembles de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{A}$ et N est négligeable.

Tribu complétée : tribu complétée par les négligeables pour μ.

1.5 Mesure de Lebesgue, ensembles non-mesurables, mesures de Hausdorff

Définition 1.10 (Mesure de Lebesgue). Pour $A \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\mathscr{L}^d(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{d} \left|b_k^i - a_k^i\right| \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{d} \left(a_k^i\,;b_k^i\right)\right\}.$$

Proposition 1.5 (Propriétés de $\mathscr{L}^d$).

(i) $\mathscr{L}^d$ est une mesure extérieure.

(ii) $\mathscr{L}^d$ est Borel.

(iii) $\mathscr{L}^d$ est Borel régulière, i.e. pour tout $A \in P(\mathbb{R}^d)$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A \subset B$ et $\mathscr{L}^d(A) = \mathscr{L}^d(B)$.

(iv) $\mathscr{L}^d$ est l'unique mesure telle que

$$\mathscr{L}^d\left(\prod_{i=1}^{d} (a_i\,;b_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} |b_i - a_i|\,.$$

(v) Si T est une isométrie affine, alors

$$\mathscr{L}^d\big(T(A)\big) = \mathscr{L}^d(A).$$

Les boréliens sont générés par des pavés (dans $\mathbb{R}^d$).

Proposition 1.6 (Existence de non-mesurables).

— *Dans ZF, tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ sont Borel.*

— *Dans ZFC, il existe des ensembles qui ne sont pas $\mathscr{L}^1$-mesurables.*

Théorème 1.9 (Banach–Tarski). *Soit $B \subset \mathbb{R}^3$ la boule unité.*
Alors, il existe $\{B_{1,k}\}_{k=1}^n$ et $\{B_{2,k}\}_{k=1}^n$ tels que $B = \bigcup_{k=1}^n B_{1,k} \cup B_{2,k}$ et il existe une isométrie affine T telle que

$$B = \bigcup_{k=1}^n T(B_{1,k}) \text{ et } B = \bigcup_{k=1}^n T(B_{2,k}).$$

Définition 1.11 (Ensemble de Cantor). On définit la suite d'ensembles $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ par

$$\begin{cases} C_{n+1} & = T(C_n) = T_1(C_n) \cup T_2(C_n), \\ C_0 & = [0\,;1] \end{cases}$$

où

$$T_1\colon \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1/3] \\ x & \longmapsto & x/3 \end{array} \qquad T_2\colon \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & [2/3\,;1] \\ x & \longmapsto & 2/3 + x/3 \end{array}$$

On remarque que $C_{n+1} \subset C_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
On définit l'ensemble de Cantor $C \subset [0\,;1]$ par

$$C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

Remarque 1.3.
— $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} C_{n,k}$ où $\operatorname{diam}(C_{n,k}) = 3^{-n}$.
— $\mathscr{L}^1(C_n) \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} \operatorname{diam}(C_{n,k}) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par théorème du cours

$$\mathscr{L}^1(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}^1(C_n) = 0.$$

Proposition 1.7 (Ensemble de Cantor).
— *Il existe une bijection de C dans $[0\,;1]$.*
— *C est compact d'intérieur vide, i.e. il n'existe aucune boule ouverte B telle que $B \subset C$.*
— *C ne contient pas de points isolés, i.e.*

$$\forall x \in C, \exists (x_n) \subset C \text{ telle que } x_n \longrightarrow x \text{ et } x_n \neq x.$$

Proposition 1.8. *Existence de $\mathscr{L}^1$-mesurable, non Borel*
— *On définit $f\colon x \in [0\,;1] \mapsto x + c(x) \in [0\,;2]$. La fonction f est continue et strictement croissante, donc injective.*
— *$\mathscr{L}^1\big(f(C)\big) = 1$.*

Définition 1.12 (Mesure de Hausdorff). Pour $s \in [0\,;+\infty)$ et $S \in (0\,;+\infty)$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_s}{2^s} \operatorname{diam}(C_k)^s \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k, \operatorname{diam}(C_k) \leqslant \delta \right\}$$

où α_s une constante de renormalisation telle que $\alpha_d = \mathscr{L}^d\big(\mathcal{B}(0,1)\big)$.
Remarque 1.4. Si $\delta_1 \leqslant \delta_2$ alors $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geqslant \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$.
On définit $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Théorème 1.10 (Structure de $\mathcal{H}^s$). *Pour tout $s \in [0\,;+\infty)$, $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure Borel régulière.*

(i) $\mathcal{H}^0$ *est la mesure de comptage.*

(ii) $\mathcal{H}^d = \mathscr{L}^d$ *si* $d = s$.

(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *et* $\mathcal{H}^s\big(T(A)\big) = \mathcal{H}^s(A)$ *pour toute isométrie affine* T.

Remarque 1.5.

Lemme 1.2. *Si $0 \leqslant s, t < +\infty$ avec $s < t$, alors*

— *si* $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ *alors* $\mathcal{H}^t(A) = 0$,

— *si* $\mathcal{H}^t(A) > 0$ *alors* $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Définition 1.13 (Dimension de Hausdorff).

$$\begin{aligned}\dim_{\mathcal{H}}(A) &\overset{\text{def}}{=} \inf\big\{s \in [0\,;+\infty) \,\big|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\big\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \sup\big\{t \in [0\,;+\infty) \,\big|\, \mathcal{H}^t(A) = +\infty\big\}\end{aligned}$$

Remarque 1.6. Pour calculer $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ on cherche un $s \in [0\,;+\infty)$ tel que

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < +\infty.$$

Théorème 1.11 (Caractérisation de $\dim_{\mathcal{H}}$ pour les ensembles auto-similaires). *Si $S_1, \ldots, S_m$ sont des similitudes de rapports $r_1, \ldots, r_m$ et si C est un ensemble tel que*

$$C = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(C)$$

alors, $s = \dim_{\mathcal{H}}(C)$ si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i^s = 1$.

Corollaire 1.1. *Si C est l'ensemble de Cantor,* $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

2 Fonction mesurables et intégrale de Lebesgue

2.1 Fonctions mesurables et leurs propriétés

Définition 2.1 (Fonction mesurable).

— On dit que $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est Borel mesurable si

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$$

pour tout ouvert $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$.

— Si on considère une mesure $\mu\colon P\big(\mathbb{R}^d\big) \to [0\,;+\infty]$ on dit que $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est μ-mesurable : $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}_\mu$ pour tout $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.

— Si f est continue, f est Borel.

— Si $A \in \mathcal{A}_\mu$, alors $\mathbf{1}_A$ est mesurable.

— Si μ est Borel (i.e. $\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \subset \mathcal{A}_\mu$) alors, si f est Borel, alors f est μ-mesurable.

Proposition 2.1 (Caractérisation de la mesurabilité).

— *Une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est μ-mesurable si et seulement si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu$$

où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

— *De manière équivalente, on a que f est μ-mesurable si et seulement si*

$$f^{-1}\big((-\infty\,;c)\big) \in \mathcal{A}_\mu$$

pour $c \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2 (Concepts de limites inf et sup). Étant donné une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{cases} \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n & \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k \\ \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n & \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k \end{cases}.$$

Remarque 2.2.

$$\liminf = \limsup \iff (a_n) \text{ converge}$$

Théorème 2.1 (Stabilité des fonctions mesurables).

(i) Si $f, g : \mathbb{R}^d \to [-\infty\,;+\infty]$ sont μ-mesurables alors les fonctions

$$(f,g) \quad f+g \quad fg \quad f/g \quad \min\{f,g\} \quad \max\{f,g\} \quad |f|$$

sont μ-mesurables ($g \neq 0$ pour f/g).

(ii) De même si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ suite de fonctions μ-mesurables alors

$$\inf_{n\geqslant 1} f_n \quad \sup_{n\geqslant 1} f_n \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n \quad \limsup_{n\to+\infty} f_n$$

sont μ-mesurables.

Remarque 2.3. $\inf\limits_{n\geqslant 1} f_n : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \inf\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$

Remarque 2.4. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont μ-mesurables, alors $f \circ g$ n'est pas forcément μ-mesurable. Par contre, si f, g sont Borel alors $f \circ g$ est Borel. En effet $(f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1} \circ f^{-1}(B)$.
En revanche si f est Borel et g est μ-mesurable alors $f \circ g$ est μ-mesurable.

Définition 2.3 (Fonctions simples). On dit que $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty\,;+\infty]$ que l'on suppose μ-mesurable est simple si

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$$

où $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} \in [-\infty\,;+\infty]$ et $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$.

Théorème 2.2 (Décomposition des fonctions mesurables). *Si $f\colon \mathbb{R}^d \to [0\,;+\infty]$ est μ-mesurable, alors il existe $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ et $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset [0\,;+\infty]$ tels que*

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{A_k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}.$$

Notons que $(f_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}\right)$ est croissante.

2.2 Théorèmes de Lusin et Ergoroff

Théorème 2.3 (Lusin). *Soit μ Borel régulière et $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction μ-mesurable. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu(A) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$ tel que*

(i) $\mu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$,

> *(ii)* $f\colon K_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *est continue.*

> **Corollaire 2.1 (Approximation par les fonctions continues).** *Si $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et μ-mesurable pour μ Borel régulière, si $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $f_\varepsilon\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue telle que*
>
> $$\mu\Big(\big\{x \in A \;\big|\; f(x) \neq f_\varepsilon(x)\big\}\Big) < \varepsilon$$

Définition 2.4 (Propriété valant μ-presque partout). On dit qu'une propriété logique sur X vaut μ-p.p. s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que la propriété vaut sur A et $\mu(X \setminus A) = 0$.

Définition 2.5 (Convergence μ-p.p.). On dit que $(f_n)_{n\geqslant 1}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ converge μ-p.p. vers $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ si

$$\mu\Big(\big\{x \in A \text{ t.q. } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} f(x)\big\}\Big) = 0.$$

> **Théorème 2.4 (Ergoroff).** *Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ mu-mesurables telles que*
>
> $$f_n \to f \;\; \mu\text{-p.p. dans } A \in \mathcal{A}_\mu$$
>
> *où $\mu(A) < +\infty$.*
> *Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\mu$ tel que*
>
> *(i)* $\mu(A \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$,
>
> *(ii)* $f_n \to f$ *uniformément sur* B_ε.

Remarque 2.5. On ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Ergoroff.
Regarder par exemple $f_n(x) = x^n$ sur $(0\,;1)$ avec $\mu = \mathscr{L}^1_{L[0\,;1]}$.
Clairement $f_n(x) \to 0$ pour $x \in [0\,;1)$.
On peut montrer que si $B \subset (0\,;1)$ est tel que

$$\mathscr{L}^1_{L[0\,;1]}\big([0\,;1] \setminus B\big) = 0,$$

alors $\sup\limits_{x\in B} |f_n(x) - 0| = 1$.

2.3 Intégrale de Lebesgue et théorèmes limites

Définition 2.6 (Intégrale des fonctions simples). Si $f\colon \mathbb{R}^d \to [0\,;+\infty]$ est μ-mesurable et simple, i.e.

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k},$$

on définit son intégrale de Lebesgue par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

où $a_k\mu(A_k) = 0$ si $a_k = 0$ et $\mu(A_k) = +\infty$.

> **Lemme 2.1 (Approximation simple).** *Si $f\colon X \to [0\,;+\infty]$ est μ-mesurable, alors, il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions μ-mesurables et simples telles que*
>
> *(i)* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ *μ-p.p.,*
>
> *(ii)* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *est croissante et* $f_n \leqslant f$ *pour tout* $n \geqslant 1$,
>
> *(iii) les* $\{A_k\}_{k=1}^n$ *peuvent être choisis disjoints.*

Définition 2.7 (Intégrales de fonctions positives).

— Si $f\colon X \to [0\,;+\infty]$ est μ-mesurable, on définit son intégrale de Lebesgue par

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X g \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; f \geqslant g \ \mu \text{ p.p., } g \text{ simple}\right\}.$$

— Si $f\colon X \to [0\,;+\infty]$, on dit que f est μ-intégrable si $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ ou $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ ($f = f^+ - f^-$). Alors, son intégrale de Lebesgue est

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu.$$

Dans le cas où $\int_X |f| \,\mathrm{d}w < +\infty$, on dit que f est μ-sommable, noté $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Proposition 2.2 (Propriétés des fonctions positives). *Soient $f, g\colon X \to [0\,;+\infty]$ μ-mesurables et $E, F \in \mathscr{A}_\mu$.*

(i) Si $0 \leqslant f \leqslant g$ μ-p.p. alors $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

(ii) Si $E \subset F$, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_F f \,\mathrm{d}\mu$.

(iii) Si $\alpha > 0$ alors $\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

(iv) Si $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p..

Lemme 2.2 (Sur les fonctions simples). *Soient $g, h\colon X \to [0\,;+\infty]$ deux fonctions simples et μ-mesurables.*

(i) Alors

$$\nu_g\colon \begin{aligned} \mathscr{A}_\mu &\longrightarrow [0\,;+\infty] \\ E &\longmapsto \int_E g \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

est une mesure.

(ii) De plus, on a que $\int_X (g+h) \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu$.

Théorème 2.5 (Convergence monotone). *Soit (f_n) une suite de fonctions μ-mesurables positives telles que*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ μ-p.p.,

(ii) $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$ pour μ-presque-tout $x \in X$.

Alors, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposition 2.3 (Additivité de l'intégrale sur les fonctions positives). *Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions μ-mesurables positives alors*

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposition 2.4 (Linéarité pour les fonctions sommables). *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et $\int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.*

Par ailleurs, $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Théorème 2.6 (Lemme de Fatou). *Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions μ-mesurables et positives, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Théorème 2.7 (Convergence dominée). *Soient $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fnoctions μ-mesurables, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+; \mu)$ telles que*

(i) $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ *μ-p.p.,*

(ii) $|f_n| \leqslant g$ *μ-p.p..*

Alors, on a que $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$. En particulier, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposition 2.5 (Inégalité de Tchebychev et Jensen). *Soit $f\colon X \to [0\,;+\infty]$ μ-mesurable et prenons $p \in [0\,;+\infty]$ et $t \geqslant 0$. Alors on a*

$$\mu\big(\big\{x \in X \;\big|\; |f(x)| \geqslant t\big\}\big) \leqslant \frac{1}{t^p} \int_{\left\{|f|\geqslant t\right\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Si maintenant μ est une probabilité i.e. $\mu(X) = 1$ et si $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe alors

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Théorème 2.8 (Inégalité de Hölder et Minkowski). *Soient $f, g\colon X \to [0\,;+\infty]$ deux fontions μ-mesurables et $p, q \in [1\,;+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants conjugués). Alors,*

$$\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

et

$$\left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

3 Théorie fonctionnelle de l'intégration

3.1 Espaces $L^p(\mu)$

Étant donné $p \in [1\,;+\infty)$, on s'intéresse à l'espace des fonctions

$$\mathcal{L}^p(\mu) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f : X \to \mathbb{R} \to f \;\middle|\; f \text{ est } \mu\text{-mesurable et } \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

où X est un espace quelconque et $\mu\colon P(X) \to [0\,;+\infty]$.

Définition 3.1 (Normes et semi-normes). Si X est un espace vectoriel, une application $N\colon X \to \mathbb{R}_+$ est une norme

(i) $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$,

(ii) $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$,

(iii) $N(x) = 0 \iff x = 0$.

Si N satisfait (i) et (ii) et pas (iii), N est une semi-norme.

Proposition 3.1. *L'application* $|\bullet|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \colon f \mapsto \mathcal{L}^p(\mu) \mapsto \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ *est une semi-norme.*

Définition 3.2 (Égalité μ-p.p.). On dit que $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sont égales μ-p.p. si

$$\mu\Big(\big\{x \in X \;\big|\; f(x) \neq g(x)\big\}\Big) = 0.$$

Ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\mu)$, noté $\sim_\mu$.

Définition 3.3 (Espaces $L^p(\mu)$). On pose

$$\begin{aligned} L^p(X, \mathbb{R}; \mu) &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}; \mu) / \sim_\mu \\ &= \big\{[f] \;\big|\; f \in \mathcal{L}^p(\mu)\big\}. \end{aligned}$$

L'espace $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel avec $\alpha[f] + \beta[g] = [\alpha f + \beta g]$.

Proposition 3.2 (Structure normée). *L'espace* $L^p(\mu)$ *est normé par* $|\bullet|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ *au sens où on définit*

$$\big\|[f]\big\|_{L^p(\mu)} \overset{\text{def}}{=} |f|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$$

pour $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *qui représente* $[f]$.

Remarque 3.1. Si $[f] \in L^p(\mu)$, on ne peut pas parler des propriétés de f partout, mais uniquement μ-p.p..

Définition 3.4 (Cas $p = +\infty$). Pour $p = +\infty$, on définit $\|\bullet\|_{L^\infty(\mu)}$ par

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} \overset{\text{def}}{=} \inf\Big\{\mu \geqslant 0 \;\Big|\; \mu\big(\{x \in X \;|\; |f(x)| > \mu\}\big) = 0\Big\}.$$

Caractérisation : $\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant M \iff |f(x)| \leqslant M$ μ-p.p..

Dans la suite, on abandonne la notation $[f]$, et on notera $f \in L^p(\mu)$ pour $p \in [1\,;+\infty]$.

Définition 3.5 (Espace $L^\infty(\mu)$). On pose $L^\infty(X, \mathbb{R}; \mu) \overset{\text{def}}{=} \big\{f \colon X \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ est } \mu\text{-mesurable et } \|f\|_{L^\infty} < +\infty\big\}$. C'est un espace normé.

Théorème 3.1 (Complétude). *Pour* $p \in [1\,;+\infty]$ *et toute mesure* $\mu \colon P(X) \to [0\,;+\infty]$, *l'espace*

$$\big(L^p(X, \mathbb{R}; \mu), \|\bullet\|_{L^p(\mu)}\big)$$

est un espace de Banach, *i.e. complet pour sa norme.*

Définition 3.6 (Espace séparable). On dit que $\big(X, \|\bullet\|_X\big)$ est espace de Banach est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ qui est dénombrable et dense.

Exemple : $\mathbb{R}$ est séparable avec $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On va montrer que $L^p\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu\big)$ pour μ une mesure de Radon et $p \in [1\,;+\infty)$ est séparable.

Lemme 3.1 (Densité des fonction simples). *La classe* S_μ *des fonctions simples* μ*-mesurables telles que*

$$\mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d \;\big|\; g(x) \neq 0\big\}\Big) < +\infty$$

pour $g \in S_\mu$, *est dense dans* $L^p(\mu)$.

Théorème 3.2 (Densité des fonctions continues). *Pour* $p \in [1\,;+\infty)$ *et* $\mu \colon P\big(\mathbb{R}^d\big) \to [0\,;+\infty]$ *une mesure de* Radon, *l'espace*

$$\mathscr{C}^0_{\mathrm{c}}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\big) = \Big\{f \in \mathscr{C}^0\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\big) \;\Big|\; \operatorname{supp}(f) \subset K \textit{ pour } K \textit{ compact}\Big\}$$

où $\operatorname{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$.

Théorème 3.3 (Séparabilité de $L^p(\mu)$). *Si* $\mu\colon P(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ *est* Radon *et* $p \in [1\,;+\infty)$*, alors* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ *est séparable.*

Rappel. Si $(X, \|\bullet\|_X)$ est un espace de Banach, on définit son dual $X^\star$ comme étant l'ensemble des formes linéaires bornées $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. En particulier, $X^\star$ est un espace de Banach avec $\|\varphi\|_{X^\star} \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$.

Théorème 3.4 (Dualité dans $L^2(\mu)$). *L'espace* $L^2(\mu)$ *est un espace de* Hilbert *pour le produit scalaire*

$$f, g \in L^2(\mu) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} fg \,\mathrm{d}\mu.$$

En particulier, on a que $L^2(\mu)^\star \simeq L^2(\mu)$ *i.e. pour tout* $\varphi \in L^2(\mu)^\star$*, il existe* $g_\varphi \in L^2(\mu)$ *telle que*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f g_\varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Théorème 3.5 (Dualité dans $L^p(\mu)$). *Si* $\mu\colon P(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ *est de* Radon *et* $p \in [1\,;+\infty)$*, alors*

$$L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)^\star \simeq L^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$$

où $q \in (1\,;+\infty]$ *est tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Ainsi, pour $\varphi \in L^p(\mu)^\star$*, il existe* $g_\varphi \in L^q(\mu)$ *telle que*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f g_\varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

3.2 Mesures signées et théorème de Lebesgue Radon–Nikodym

Depuis le début, nous considèrons des mesures de Radon positives mais nous pouvons tout à fait considérer des mesures à valeurs négatives.

Définition 3.7 (Mesures Borel signées). On dit que $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to (-\infty\,;+\infty]$ est une mesure signée si :

(i) $\nu(\varnothing) = 0$,

(ii) pour toute suite $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ disjointe, on a :

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(B_k),$$

si cette valeur existe et dans la cas où $\nu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k\right) < +\infty$, on a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\nu(B_k)| < +\infty$.

♦ **Exemple (Mesures à densité).** Étant donné $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ une mesure de Radon et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, alors $\nu(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu$ est une mesure signée ($v = f \cdot \mu$). ♢

Définition 3.8 (Variation totale). Pour $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [-\infty\,;+\infty]$ une mesure signée, on définit sa variation totale par

$$|\nu|(B) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(B_k)| \;\middle|\; B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \text{ (union disjointe)}, \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Notation. On notera $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures signées Borel de Radon, i.e. $\nu(K) \in (-\infty\,;+\infty)$ pour tout compact K et $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de Radon finies, i.e. $|\nu|(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

Proposition 3.3. *Si $\nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors $|\nu| : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ est une mesure de Radon classique.*

Remarque 3.2. Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ en posant

$$(\mu+\nu)(B) \overset{\text{def}}{=} \mu(B) + \nu(B)$$
$$(\alpha\mu)(B) \overset{\text{def}}{=} \alpha\mu(B)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ alors on peut munir $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Remarque 3.3. On note que $|\nu|(B) \geqslant |\nu(B)|$. Donc

$$\begin{cases} \nu^+ \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\big(|\nu| + \nu\big) \\ \nu^- \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\big(|\nu| - \nu\big) \end{cases}$$

sont des mesures positives de Radon. On a alors

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

une décomposition par parties positives et négatives (Jordan).

♦ **Exemple.** Étant donnée $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ de Radon et $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ on peut montrer que $\nu = h \cdot \mu$ telle que $\nu(B) = \int_B h \,\mathrm{d}\mu$ est une mesure signée de Radon où $|\nu|(B) = \int_B |h| \,\mathrm{d}\mu$. ♢

Définition 3.9 (Absolue continuité et singularité).

— On dit que ν est absolument continue par rapport à μ, noté $\nu \ll \mu$, si

$$\mu(B) = 0 \implies |\nu|(B) = 0.$$

— On dit que ν est singulière par rapport à μ, noté $\nu \perp \mu$, s'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu(B) = 0$ et $|\nu|\big(\mathbb{R}^d \setminus B\big) = 0$.

Théorème 3.6 (Décomposition de Lebesgue et Radon–Nikodym). *Si $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ et $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [-\infty\,;+\infty]$ sont des mesures de Radon, alors*

(i) il existe une unique paire ν_{ac}, ν_{s} telles que

$$\nu = \nu_{\text{ac}} + \nu_{\text{s}} \quad \textit{(décomposition de Lebesgue)}$$

et $\nu_{\text{ac}} \ll \mu$ et $\nu_{\text{s}} \perp \mu$.

(ii) il existe une unique fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$ telle que

$$\nu_{\text{ac}} = f \cdot \mu \quad \textit{(décomposition de Radon–Nikodym).}$$

Proposition 3.4 (Lien entre mesure et variation totale). *Si $\nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $h \in L^1_{\text{loc}}(\nu)$ telle que $\nu = h \cdot |\nu|$.*

Application 1 : On définit l'intégrale contre $\nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\nu \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} fh \,\mathrm{d}|\nu|.$$

Application 2 : $L^p(\mu)^\star = L^q(\mu)$ si $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et si $p \in [1\,;+\infty)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$). Prenons $\varphi \in L^p(\mu)^\star$, i.e.

$$\varphi\colon f \in L^p(\mu) \mapsto \varphi(f) \in \mathbb{R},$$

où φ est linéaire et bornée.

On considère $\nu\colon B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \varphi(\mathbf{1}_B)$. Alors,

— $v \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$,

— $\nu \ll \mu$.

3.3 Espace des mesures de Radon et théorème de Riesz

Dans le suite, nous allons étudier majoritairement l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de Radon signées et finies.

Proposition 3.5. *$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel normé avec $\|\mu\|_{\mathrm{TV}} \overset{\mathrm{def}}{=} |\mu|(\mathbb{R}^d)$.*

Nous allons montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach, en notant que c'est le dual de

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) = \overline{(\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \|\bullet\|_{\mathscr{C}^0})}^{\mathscr{C}^0}$$

Théorème 3.7 (Représentation de Riesz i). *Soit $\varphi\colon \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ linéaire et telle que $\sup\{\varphi(f) \mid \|f\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant 1, \operatorname{supp} f \subset K < +\infty\}$ pour tout compact K. Alors, il existe $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Lemme 3.2. *Partition de l'unité.*
Si $\{U_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ sont ouverts et $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ compact, alors il existe des fonctions $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ telles que

(i) $\xi_k \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $\operatorname{supp}(\xi_k) \subset U_k$,

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 1$ *sur* K.

On va construire « manuellement » la mesure μ donnée par le théorème de Riesz.
On pose pour U ouvert de $\mathbb{R}^d$,

$$\mu_\varphi(U) = \sup\Big\{\varphi(f) \;\Big|\; f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \|f\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant 1, \operatorname{supp}(f) \subset U\Big\}.$$

Remarque, par construction, $\mu_\varphi(U) \geqslant 0$.
Car si $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ $\operatorname{supp}(f) \subset U$ tel que $\varphi(f) \leqslant 0$ alors $\varphi(-f) = -\varphi(f) \leqslant 0$. Pour $A \subset \mathbb{R}^d$ quelconque, on pose

$$\mu_\varphi(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{\mu_\varphi(U) \mid A \subset U \text{ ouvert}\}.$$

Proposition 3.6. *$\mu_\varphi\colon P(\mathbb{R}^d) \to [0\,;+\infty]$ est une mesure de Radon.*

On a montré que $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)^\star \simeq \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
Mais, $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un espace de Banach.

Définition 3.10 (Fonctions qui décroissent à l'infini). On pose

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d) \mid \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact t.q. } |f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \in \mathbb{R}^d \setminus K_\varepsilon\}.$$

Proposition 3.7. *$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach qui coïncide avec le complété de $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 3.8 (Riesz ii). *Si $\varphi\colon \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ est linéaire et bornée, dans le sens où :*

$$\ldots$$

alors il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu.$$

De plus, $\|\varphi\| = \|\mu\|_{\mathrm{TV}} < +\infty$.

En particulier, $\left(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\bullet\|_{\mathrm{TV}}\right)$ *est un espace de* BANACH.

3.4 Topologie faible-$\star$ des mesures de RADON

On a vu que $\left(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\bullet\|_{\mathrm{TV}}\right)$ est un espace de BANACH. Or les BANACH ont peu de compacts au sens classique. Notamment, un théorème dû à RIESZ affirme que la boule unité d'un HILBERT est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

DÉFINITION 3.11. On dit que $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ converge faible-$\star$ vers $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ si

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d),$$

notée $\mu_n \rightharpoonup^\star \mu$.

REMARQUE 3.4. Si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un compact, alors $\mathscr{C}_c^0(K) = \mathscr{C}_0(K) = \mathscr{C}_b(K) = \mathscr{C}^0(K)$. Alors $\mathscr{C}^0(K)^\star \simeq \mathcal{M}(K)$.

THÉORÈME 3.9 (BANACH–ALAOGLU). *Si* $(\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\left(\|\mu_n\|_{\mathrm{TV}}\right)_{n\geqslant 1}$ *est bornée, alors, il existe* $\left(\mu_{n_k}\right)_{k\geqslant 1}$ *et* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *t.q.*

$$\mu_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\star} \mu.$$

En particulier, si $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(K)$ *alors* $\int \varphi \,\mathrm{d}\mu_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int \varphi \,\mathrm{d}\mu$ *pour tout* $\varphi \in \mathscr{C}^0(K)$.

4 Théorie du transport optimal

DÉFINITION 4.1 (Mesures de probabilité). On dit que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure de probabilité si :

— μ est positive,

— $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$.

On note alors $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Pour $K \subset \mathbb{R}^d$ compact, on écrit $\mu \in \mathcal{P}(K)$ si $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et $\mu(K) = 1$.

DÉFINITION 4.2 (Mesure image). Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ μ-mesurable, alors ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$)

$$\nu(B) \overset{\text{def}}{=} \mu\left(T^{-1}(B)\right) = T_\#\mu(B)$$

définit une mesure de probabilité.

PROPOSITION 4.1 (Caractérisation de la mesure image). $\nu = T_\#\mu$ *si et seulement si* $\int \varphi \,\mathrm{d}\nu = \int \varphi \circ T \,\mathrm{d}\mu$ *pour toute fonction* $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to [0\,;+\infty]$ BOREL.

4.1 Problème de MONGE

$$(P_\mu) \qquad \inf_T \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |T(x) - x| \,\mathrm{d}\mu(x) \;\middle|\; T_\#\mu = \nu \right\}$$

4.2 Problème de KANTOROVICH

DÉFINITION 4.3 (Plans de transport). On dit que $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$ est un plan de transport entre μ et ν si

$$\begin{cases} \pi^1_\#\gamma = \mu & \int \varphi(x) \,\mathrm{d}\gamma(x,y) = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu \\ \pi^2_\#\gamma = \nu & \int \varphi(y) \,\mathrm{d}\gamma(x,y) = \int \varphi \,\mathrm{d}\nu \end{cases} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}^0.$$

On note alors $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu) \neq \varnothing$.

Proposition 4.2 (Caractère fermé de $\Gamma(\mu,\nu)$). *Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$, alors $\Gamma(\mu,\nu)$ est fermé en topologie faible-$\star$ i.e. si $(\gamma_n) \subset \Gamma(\mu,\nu)$ est telle que $\gamma_n \subset \gamma$, alors $\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)$.*

Théorème 4.1 (Existence de transports optimaux). *Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$, il existe $\gamma^\star \in \Gamma(\mu,\nu)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y| \, \mathrm{d}\gamma^\star(x,y) = \inf(P_K).$$

Proposition 4.3 (Kantorovich relâche Monge). *Si $\gamma^\star \in \mathrm{sol}(P_K)$ est t.q. $\gamma^\star = (\mathrm{Id}, T^\star)_\# \mu$, alors $T^\star \in \mathrm{sol}(P_\mu)$.*
La réciproque est vraie si $\mu \ll \mathscr{L}^d$.

Théorème 4.2 (Brenier 1987, Ganglou, McCann 1996). *Dans le cas où :*

$$(P_K) \quad \inf_\gamma \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} h(x-y) \, \mathrm{d}\gamma(x,y) \;\middle|\; \gamma \in \Gamma(\mu,\nu) \right\}$$

où h est strictement convexe.
Alors, si $\mu \ll \mathscr{L}^d$, il existe une unique fonction $T^\star \in \mathrm{sol}(P_\mu)$ telle que

$$\gamma^\star = (\mathrm{Id}, T^\star)_\# \mu.$$