Physique quantique – Formulaire de mécanique analytique

d'après le cours PA101 – ENSTA Paris

A. Wayoff

2022–2023

▷ **Coordonnées généralisées** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r}_{k=1,\dots,N}$ et comportant ℓ degrés de liberté : ensemble de ℓ quantités indépendantes $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, \dots, q_\ell\}$ telles que

$$\forall k \in [\![1\,;N]\!] \quad \overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_k}(q_1, \dots, q_\ell) \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1\,;\ell]\!]^2 \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad \text{(indépendance).}$$

▷ **Lagrangien** d'un système de N particules de masse $m_{k=1,\dots,N}$ repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r}_{k=1,\dots,N}$ et soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(\overrightarrow{r_1}, \dots, \overrightarrow{r_N})$

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_k}}{\mathrm{d}t} \right)^2 - V\left(\overrightarrow{r_1}, \dots, \overrightarrow{r_N}\right).$$

▷ **Équations de Lagrange** pour un système dont les particules peuvent être décrites par les coordonées généralisées $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell\}$ et sont soumises à des forces qui dérivent en totalité d'un potentiel $V = V(q_1, \dots, q_\ell)$

$$\forall i \in [\![1\,;\ell]\!] \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

▷ **Impulsions** pour un système de N particules repérées par un vecteur position $\overrightarrow{r}_{k=1,\dots,N} = \overrightarrow{r_k}(q_1, \dots, q_\ell)$ et comportant ℓ degrés de liberté :

$$\forall i \in [\![1\,;\ell]\!] \quad p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

▷ **Hamiltonien** d'un système décrit par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \{p_1, \dots, p_\ell\}$

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

▷ **Équations de Hamilton** pour un système décrit par les coordonées généralisées $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, \dots, q_\ell\}$ et les impulsions correspondantes $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \{p_1, \dots, p_\ell\}$

$$\forall i \in [\![1\,;\ell]\!] \quad \begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = +\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}.$$

▷ **Crochets de Poisson** en variables canoniques $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ pour deux fonctions $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$\{f, g\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}.$$

▷ **Équation fondamentale de la mécanique classique** : pour toute fonction $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\}.$$